

**BSC (PART - I) EXAMINATION, 2012**

**MATHEMATICS**

**Paper Second : Calculus**

Note : Attempt all the Sections as per instructions.

**Section - A**

Note : Attempt all the Sections as per instructions.

1. Attempt all parts. Give answer of each part in about 50 words

$$1\frac{1}{2} \times 10 = 15$$

- (i) State Maclaurin's theorem. मैक्लॉरिन प्रमेय का प्रकथन कीजिए।  
(ii) Find the asymptotes of the curve. वक्र की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।  
 $(x - 2y)(2x + 7)(x + y + 1) + 2x + y + 3 = 0$ .  
(iii) Find the radius of curvature of  $y = 4 \sin x - \sin 2x$  at  $x = \pi/2$ .  
 $y = 4 \sin x - \sin 2x$  की  $x = \pi/2$  पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।  
(iv) Define continuity of a function. फलन की निरन्तरता को परिभाषित कीजिए।  
(v) Write down the  $n$ th derivative of  $(ax + b)^{-1}$ .  
 $(ax + b)^{-1}$  का  $n$ वाँ अवकलन गुणांक लिखिए।  
(vi) Define a cusp. कस्प की परिभाषा दीजिए।  
(vii) Define envelope of a family of curve.  
वक्र समुदाय के वक्रावरण की परिभाषा दीजिए।  
(viii) If  $u = \tan^{-1} \frac{x}{y}$  verify that  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$   
(ix) Find the envelope of the family of straight lines  
 $y = mx + a \sqrt{1 + m^2}$ .  
वक्र समुदाय  $y = mx + a \sqrt{1 + m^2}$  के वक्रावरण प्राप्त कीजिए।  
(x) Mention the number of loops in the curve  $r = a \sin 3\theta$ .  
वक्र  $r = a \sin 3\theta$  में लूप्स की संख्या बताइए।

**Section - B**

Attempt all questions. Give answer of each question in about 200 words.

2. (a) If  $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ , prove that :

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$$

and deduce that :

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$$

यदि  $y = \sin(m \sin^{-1} x)$  तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0 \text{ और इसे निगमित कीजिए—}$$

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0.$$

(b) Expand  $2x^3 + 7x^2 + x - 1$  in powers of  $(x - 2)$ .

$2x^3 + 7x^2 + x - 1$  को  $(x - 2)$  के घातांक में विस्तार कीजिए। अथवा

(a) Find the asymptotes of the following curve :

निम्न वक्र की अनन्त स्पर्शियों को ज्ञात कीजिए—

$$3x^3 + 2x^2y - 7xy^2 + 2y^3 - 14xy + 7y^2 + 4x + 5y = 0.$$

(b) Show that the minimum value of

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y} \text{ is } 3a^2$$

दिखाइए कि  $u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$  का न्यूनतम मान  $3a^2$  है।

3. (a) Trace the curve  $y^2(a + x) = x^2(a - x)$ .

वक्र  $y^2(a + x) = x^2(a - x)$  का अनुरेखण कीजिए।

(b) Derive pedal formula for radius of curvature and find the radius of curvature at the point  $(p, r)$  on the curve  $p^2 = ar$ .

वक्रता त्रिज्या के लिए पीडल सूत्र व्युत्पन्न कीजिए और वक्र  $p^2 = ar$  के बिन्दु  $(p, r)$  पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए। अथवा

(a) If  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ ,

Show that :

यदि  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ , तो दिखाइए कि—

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta. \text{ https://www.vbspustudy.com}$$

(b) Find the envelope of the curve  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  where the parameter

$a$  and  $b$  are connected by  $a^2 + b^2 = c^2$ ,  $c$  is constant.

वक्र  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  का आवरण वक्र ज्ञात कीजिए, जहाँ  $a$  और  $b$  प्राचल

$a^2 + b^2 = c^2$  द्वारा सम्बन्धित हैं,  $c$  एक अचर है।

4.

(a) Evaluate : मूल्यांकित कीजिए—  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2}$

(b) State and prove Euler's theorem.

यूलर प्रमेय का कथन देते हुए सिद्ध कीजिए।

अथवा

(a) Find the point of inflection of the curve  $y(a^2 + x^2) = x^3$ .

वक्र  $y(a^2 + x^2) = x^3$  के रूपान्तरण बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए।

(b) Define Gamma function of show that :

गामा फलन को परिभाषित कीजिए और दिखाइए कि—

$$[\Gamma(1/2)]^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$$

5. (a) If  $u_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$  and  $n > 1$ , Show that

$$u_n + n(n-1)u_{n-2} = n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

(b) Prove that : सिद्ध कीजिए कि—

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma m \Gamma n}{\Gamma m + n}$$

अथवा

(a) Evaluate : मूल्यांकित कीजिए—

$$\int_1^2 \int_0^x \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$$

(b) Change the order of integration in the integral

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2x}} V dx dy$$

समाकलन  $\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2x}} V dx dy$  के क्रम को बदलिए।

6. (a) Evaluate : मूल्यांकित कीजिए—

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx$$

(b) Find the area between the curve  $y^2(2a-x) = x^3$  and its asymptotes. वक्र  $y^2(2a-x) = x^3$  और इसके अनन्तस्पर्शी के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

(a) Show that the length of the arc of the parabola  $y^2 = 4ax$  cut-off by the line  $3y = 8x$  is  $\left(\log 2 + \frac{15}{16}\right)$

दिखाइए कि परवलय  $y^2 = 4ax$  की लम्बाई, जो कि सरल रेखा  $3y = 8x$  द्वारा  $\left(\log 2 + \frac{15}{16}\right)$  काटी जाती है।

(b) Find the volume of the solid generated by the revolution of the curve  $y^2(a-x) = a^2x$  about its asymptotes.

वक्र  $y^2(a-x) = a^2x$  को वक्र की अनन्तस्पर्शी के परितः घुमाने पर प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

### Section - C

Attempt any two questions. Give answer of each question in about 500 words

10 × 2 = 20

7. (a) Write down the statement of Dirichlet's theorem for three variables and prove it.

तीन चरों के लिए डिरिचलेट प्रमेय का कथन दीजिए और इसे सिद्ध कीजिए।

(b) If  $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$  prove that :  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

यदि  $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$  सिद्ध कीजिए कि :  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

8. (a) If  $u_n = \int x^n (a^2 - x^2)^{1/2} dx$ , prove that :

$$u_n = -\frac{x^{n-1} (a^2 - x^2)^{3/2}}{n+2} + \frac{n-1}{n+2} a^2 u_{n-2} \text{ and hence evaluate}$$

$$\int_0^a x^4 (a^2 - x^2)^{1/2} dx.$$

यदि  $u_n = \int x^n (a^2 - x^2)^{1/2} dx$ , सिद्ध कीजिए कि,

$$u_n = -\frac{x^{n-1} (a^2 - x^2)^{3/2}}{n+2} + \frac{n-1}{n+2} a^2 u_{n-2} \text{ और इस प्रकार}$$

$$\int_0^a x^4 (a^2 - x^2)^{1/2} dx \text{ मूल्यांकित कीजिए।}$$

(b) Evaluate : मूल्यांकित कीजिए—  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

9. (a) Show that if a function is differentiable at a point, it is continuous, but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि यदि एक फलन किसी बिन्दु पर अवकलनीय है तो वह वहाँ पर सतत भी होगा, लेकिन इसका विपरीत कथन सत्य नहीं है।

(b) If  $\phi(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ , show that :

$$\phi(n) + \phi(n-2) = \frac{1}{n-1} \text{ and deduce the value of } \phi(5).$$

यदि  $\phi(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$  दिखाइए कि—

$$\phi(n) + \phi(n-2) = \frac{1}{n-1} \text{ और } \phi(5) \text{ का मान निगमित कीजिए।}$$

10. (a) By Taylor's theorem prove that : टेलर प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि—

$$\log \sin (x+h) = \log \sin x + h \cot x - \frac{h^2}{2!} \operatorname{cosec}^2 x$$

$$- \frac{2h^3}{2!} + \cot x \operatorname{cosec}^2 x + \dots$$

(b) If  $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx, n > 0$ , Prove that

$$(2n + 1) I_n = 2na^2 I_{n-1}$$

यदि  $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx, n > 0$ , सिद्ध कीजिए कि

$$(2n + 1) I_n = 2na^2 I_{n-1}$$

11. (a) Use the transformation  $x + y = u, xy = v$  to find the general solution of the equation  $(px^2 + y^2)(px + y) = (p + 1)^2$

समीकरण  $(px^2 + y^2)(px + y) = (p + 1)^2$  का व्यापक हल निकालने के लिए

रूपान्तरण  $x + y = u, xy = v$  का प्रयोग कीजिए।

(b) Show that the family represented by :  
दिखाइये कि—

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

is self-orthogonal where  $\lambda$  is a parameter.

द्वारा निरूपित कुल स्वलांबिक हैं, जहाँ  $\lambda$  एक प्राचल है।