

BSC (PART – I) EXAMINATION, 2013

MATHEMATICS

Paper Second : Calculus

Note : Answer all Sections as per instructions.

Section – A (Very Short Answer Type Questions)

Attempt all parts of this question. Give answer of each part about 50 words. $1\frac{1}{2} \times 10 =$

1. (i) Define limit and continuity of a function in an interval.
किसी फलन की सीमा एवं निरन्तरता अन्तराल में परिभाषित कीजिए।
(ii) Give the statement of Rolle's theorem. रॉल प्रमेय का प्रकथन कीजिए।
(iii) State Leibnitz's theorem लाइबनिज प्रमेय का प्रकथन कीजिए।
(iv) Evaluate : मान ज्ञात कीजिए—

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$$

- (v) If $u = \tan^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ prove that : $x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} = \sin 2u$.
(vi) Find the radius of curvature at point (s, ψ) of curve $s = c \log \sec \psi$
वक्र $s = c \log \sec \psi$ के बिन्दु (s, ψ) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
(vii) Find all asymptotes parallel to the coordinate axes of the curve
 $x^4 - x^2y^2 + x^2 + y^2 - a^2 = 0$.
वक्र $x^4 - x^2y^2 + x^2 + y^2 - a^2 = 0$ की समस्त अनन्त स्पर्शियों को ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों के समानान्तर हैं।
(viii) Find the envelop of the curve $y^3 = 2a(x - a)$.
वक्र $y^3 = 2a(x - a)$ का एनविलप ज्ञात कीजिए।
(ix) Find the area between the following curves $y^2 = 20x, x^2 = 16y$.
वक्रों $y^2 = 20x, x^2 = 16y$ के बीच के क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।
(x) Mention the number of loops in the curve $r = a \cos 3\theta$ with reason.
वक्रों $r = a \cos 3\theta$ में पाश की संख्या कारण सहित बताइए।

Section – B (Short Answer Type Questions)

Attempt all questions. Give answer of each question in about 200 words. $6 \times 5 = 30$

2. (a) Find the limit as $x \rightarrow a$ of the following functions :
निम्नलिखित फलनों की परिसीमा ज्ञात कीजिए यदि $x \rightarrow a$:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2/a) - x, & \text{for } 0 < x < a \text{ के लिए} \\ 0 & \text{for } x = a \text{ के लिए} \\ a - (a^2/x), & \text{for } x > a \text{ के लिए} \end{cases}$$

(b) If $x^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$, prove that :

यदि $x^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0 \quad \text{Or}$$

(a) Apply Maclaurin's theorem to obtain the terms upto x^4 in the expansion of $\log(1 + \sin^2 x)$.

मैक्लारिन प्रमेय की सहायता से पदों तक फलन $\log(1 + \sin^2 x)$ का विस्तारण कीजिए।

(b) If $u = f(y - z, z - x, x - y)$, prove that :

यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$ तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

3. (a) If $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$, prove that :

यदि $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta.$$

(b) Discuss the maximum and minimum value of $x^2 + y^2 + 6x + 12$.
फलन $x^2 + y^2 + 6x + 12$ के अधिकतम एवं न्यूनतम मान की विवेचना कीजिए। Or

(a) Find the radius of curvature at the point (x, y) or $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(b) Find the asymptotes of the curve :

वक्र की अनन्तस्पर्शियों को ज्ञात कीजिए—

$$4x^3 - 3xy^2 - y^3 + 2xy^2 - xy - y^2 - 1 = 0$$

4. (a) Find the envelop of the curves : वक्र

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$$

where the parameters a and b are connected by the relation $a^p + b^p = c^p$, where c is constant. <https://www.vbspustudy.com>

का आवरण वक्र ज्ञात कीजिए, जहाँ a और b प्राचल $a^p + b^p = c^p$, द्वारा सम्बन्धित है, c एक अचर है।

(b) Show that the curve $y^2 + x^4(x + 1)$ has a double cusp of first species at the origin.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 + x^4(x + 1)$ के लिए मूलबिन्दु पर प्रथम आकार का दो उभयाग्र प्राप्त होता है। Or

(a) Trace the curve $x^2(x^2 + y^2) = a^2(y^2 - x^2)$.

वक्र $x^2(x^2 + y^2) = a^2(y^2 - x^2)$ का अनुरेखण कीजिए।

(b) Find the length of the polar tangent and polar normal of the curve $r = a(1 + \cos \theta)$

वक्र $r = a(1 + \cos \theta)$ के लिए ध्रुवीय स्पर्शी तथा ध्रुवीय लम्ब की लम्बाई कीजिए।

5. (a) Prove that : सिद्ध कीजिए कि—

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

(b) Evaluate : $\int_0^{2a} x^m \sqrt{(2ax - x^2)} dx$, where m positive integer

$\int_0^{2a} x^m \sqrt{(2ax - x^2)} dx$, का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ m एक घनात्मक संख्या है।

(a) Find a reduction formula for :

निम्न के लिए पदावनयन समीकरण ज्ञात कीजिए—

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin^m x dx$$

where $m \geq 2$ and hence evaluate I_4 .

जहाँ $m \geq 2$ और I_4 का मान ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that : सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{\beta(m+1, n)}{\beta(m, n)} = \frac{m}{m+n}$$

6. (a) Find the area included between the curve $y^2(a+x) = (a-x)^3$ and its asymptotes.

वक्र $y^2(a+x) = (a-x)^3$ और उसकी अनन्तस्पर्शियों के बीच का क्षेत्रफल कीजिए।

(b) Find the entire length of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$. Show that the arc of the curve upper half is bisected by $\theta = \frac{\pi}{3}$.

हृदयाभ $r = a(1 + \cos \theta)$ की पूरी लम्बाई ज्ञात कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि आधार ऊपरी चाप, रेखा $\theta = \frac{\pi}{3}$ से अर्द्धविभाजित है।

(a) Find the area of the surface generated by the revolution of cycloid $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ about x -axis.

चक्राभ $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ को x -अक्ष के चारों तरफ घुमावनी सतह का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that : सिद्ध कीजिए कि—

$$\int_0^a \int_y^a \frac{1}{(x^2 + y^2)} dy dx = \frac{\pi a}{4}$$

Section - C (Long Answer Type Questions)

Attempt any two questions. Give answer of each question in about 500 words. 10 × 2 = 20

7. (a) State and prove Liouville's extension of Dirichlet's theorem.
डिरिचलेट प्रमेय के ल्युविले विस्तार का कथन कीजिए।

(b) Expand $\log \sin x$ in powers of $(x - 2)$.
 $\log \sin x$ को $(x - 2)$ के घातांक में विस्तार कीजिए।

8. (a) If $p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$, prove that
यदि $p^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$ तो सिद्ध कीजिए कि—

$$p + \frac{d^2 p}{d\theta^2} = \frac{a^2 b^2}{p^3}$$

(b) Evaluate the following integral over the region in the positive quadrant for which $x + y \leq 1$:

निम्नलिखित समाकलन $x + y \leq 1$ के घनात्मक क्षेत्र ज्ञात कीजिए—

$$\iint (x^2 + y^2) dx dy$$

9. (a) If $U_n = \int x^n \sqrt{a^2 - x^2} dx$, prove that :

$$(n + 2) U_n = -x^{n-1} (a^2 - x^2)^{3/2} + (n - 1) a^2 U_{n-2}$$

and hence evaluate $\int_0^x x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx$,

(b) Find the intrinsic equation of $y^3 = ax^3$.

वक्र $y^3 = ax^3$ का मूलभूत समीकरण ज्ञात कीजिए।

10. (a) If $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, Show that :

यदि $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$(1 - x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$$

Hence or otherwise expand $\sin m\theta$ in powers y_2 of $\sin \theta$.

इस प्रकार या अन्य विधि से $\sin m\theta$ को $\sin \theta$ के आयाम में प्रसारित कीजिए।

(b) Evaluate :

निम्न का विस्तारित सभी घनात्मक परिवर्ती मान ज्ञात कीजिए—

$$\iiint x^{-1/2} y^{-1/2} z^{-1/2} (1 - x - y - z)^{1/2} dx dy dz$$

extended to all positive values of the variables subject to the condition $x + y + z < 1$

जबकि $x + y + z < 1$ का प्रतिबन्ध है।